1. 선형방정식

선형방정식 linear equation은 각 변수들의 거듭제곱이나 근호, 변수들간의 곱, 삼각함수나 지수함수의 형태를 포함하지 않고, 상수와 변수의 곱 항 혹은 상수 항을 더하거나 뺀 형태로 이루어진 방정식이라 할 수 있다.

예를 들어 n개의 변수에 대한 선형 방정식은 다음과 같이 표현된다.

선형방정식에서 방정식의 해 solution 란 각 변수의 임의의 상숫값을 대입하였을 때, 주어진 방정식을 만족하게 하는 수의 조 를 의미한다

//첨언. 위에서 “수의 조”라는 표현을 “sequence of number” 이라고 생각했는 데, 이것이 적절한 표현인지는 모르겠다.//

그리고 주어진 선형방정식의 모든 해들의 집합을 해집합 solution set 이라고 한다.

1. 선형연립방정식

선형연립방정식 system of linear equations이란 선형방정식이 두 개 이상 나열된 것을 의미한다. 아래는 선형연립방정식의 일반적 형태이다.

위 식에서 가 모두 0이라면, 이를 특별히 동차선형연립방정식이라고 한다. 왜, 이름의 앞에 동차가 붙는가 하면, 상수만으로 이루어진 항은 결국 변수가 0차인 항이라 볼 수 있기 때문이다. 고로 상수항이 0이되면, 선형방정식의 모든 항은 차수가 1로 동일하게 되고, 이에 따라 선형연립방정식의 모든 항도 차수가 1로 동일하게 되므로, “동차”라는 표현을 쓰는 것이다.

1. 선형연립방정식의 해

//나는 선형연립방정식의 해를 n차원 평면 상에 존재하는 n개의 실선이 모두 교차하는 점 들의 집합이라고 생각하였다. 그러나 chat-gpt의 설명에 따르면 이는 옮은 표현이 아니라고 한다. 정확히는 실선이 아닌 초평면(n차원에서 n-1차원 평면)의 교차점이라는 설명이 옮다고 한다.//

선형방정식의 해는 각 방정식의 기본 작용을 하여 얻을 수 있다. 기본작용이란 다음과 같다.

1. 한 방정식에 0이 아닌 수를 곱한다.
2. 두 방정식을 서로 교환한다.
3. 한 방적의 상수배를 다른 방정식에 더한다.

위의 작용을 통해 주어진 선형연립방정식의 해집합이 변하지 않으면서 해를 구하기는 쉬운 새로운 선형연립방정식을 찾아가는 것이다. 그리고 이렇게 찾은 해는 항상 3가지의 경우 중 하나를 가진다.

1. 해가 하나인 경우
2. 해가 존재하지 않는 경우
3. 해가 무수히 많은 경우)

//아쉽게도, 2차원 평면상에서는 위와 같은 해의 존재 제한을 이해하였지만, 그 이상의 차원에서의 해의 존재에 대한 제한을 이해하지 못했다.//

1. 행렬

행렬 matrix이란 일반적으로는 숫자를 그저 직사각형으로 나열한 것을 의미한다. 만약, 선형연립방정식에서 계수와 상수 만을 남겨서 나열했다면, 그 때는 그냥 행렬이 아닌 첨가행렬 augmented matrix, 계수만 나열했다면 계수행렬 coefficient matrix 이라고 부른다.

선형연립방정식에서 기본행 연산이 기본작용이 기억나는가? 그것이 행렬에도 적용될 수 있다. 첨가행렬(계수와 상수만 남긴 행렬)의 한 행은 선형연립방정식의 한 식에 해당한다. 고로, 첨가행렬의 각 행에도 기본작용에 해당하는 연산이 가능하고, 이것을 기본행 연산이라고 한다.

1. 한 행에 0이 아닌 수를 곱한다.
2. 두 행을 서로 교환한다.
3. 한 행의 상수배를 다른 행에 더한다.

//여담으로 “연산”이라는 어감 때문인지는 이산수학 과목에서 배우는 대수계와도 유사한 느낌이 들지만, 필지가 이산수학에 대한 이해가 부족하므로 이는 확실치 않은 것이다.//

자, 이제 선형연립방정식을 첨가행렬로 표현할 수 있고, 기본행연산이란것도 알게 되었다. 그렇다면, 구체적으로 선형연립방정식의 해는 어떻게 구할 수 있을까? 그것을 단계별로 알아보자.

먼저, 전방소거법 forward elimination이다.

전방소거법은 다음과 같다. 먼저, 한 변수의 계수가 0이 아닌 한 식을 고른다. 그 식과 다른 식을 기본작용(행렬이면 기본행연산)하여 다른 모든 식에서 그 변수 가진 항을 제거한다. 그리고 이를 다른 변수에도 반복한다. 그러면 결과적으로 아래와 유사한 형태가 나타나게 될 것이다.

위 식을 첨가행렬로 표현하면

이다. 위 행렬을 자세히 살펴보면, 각 행에서 처음으로 만나는 0이 아닌 수는 1이다. 아래의 행에서 처음으로 나타나는 1은 위의 행에서 처음으로 나타나는 1보다 오른쪽에 놓인다. 이런 행렬을 첨가행렬의 계단행렬형 row-echelon form 이라고 한다.

다음으로 후방대입법 back substitution이다.

각 첨가행렬의 행에서 처음으로 나타나는 1들 위의 수들을 0으로 만들기 위해 전방소거법처럼 기본행연산을 실시하자. 그러면 각각의 행, 선형연립방정식에서의 식은 계수가 1인 하나의 변수와 하나의 상숫값으로만 이루어진 식으로 바뀔 것이다. 이렇게 나온 행렬을 기약계단행렬형 reduced row-echelon form이라 한다. 아래는 그 예시다.

//책에서는 가우스 소거법과 가우스 조단 소거법, 피벗에 대해 이야기 하나 필자는 이를 온전히 이해하지 못했다.//

이제 최종적으로 나온 기약계단행렬을 통해 선형연립방정식의 해를 구해 볼 수 있을 것이다. 아래는 관련된 정리와 정의들이다.

1. 주어진 행렬의 계단행렬형은 많이 있을 수 있다. 그러나, 그 행렬은 서로 동등하다. 그리고 각 행에서 처음으로 나타나는 1을 포함하는 행의 수는 일정하다. 선형연립방정식의 첨가행렬의 계단행렬형에서 각 행에 처음으로 나타나는 1을 포함하는 열에 대응되는 변수를 기본변수 basic variable라 부르고, 그렇지 않은 변수를 자유변수 free variable라 부른다.
2. 주어진 행렬 A의 계단행렬형에서 0이 아닌 수를 포함하는 행의 개수를 행렬 A의 계수rank라고 부르고 rank(A)로 표기한다.
3. 선형연립방정식이 해를 가진 필요충분조건은 이 방정식의 계수행렬의 계수와 첨가행렬의 계수가 같을 때이다.
4. 선형연립방정식은 해를 가지지 않거나, 해를 가진다면 오직 한 개의 해만 가지거나 무수히 많은 해를 가진다
5. 동차선형연립방정식은 항상 해를 가진다.
6. 방정식의 수가 미지수의 수보다 작은 동차선형연립방정식은 무수히 많은 해를 가진다.
7. 선형연립방정식이 오직 하나의 해를 가질 필요충분조건은 계수행렬의 계수와 첨가행렬의 계수가 미지수의 수와 같을 때이다.

//7번의 경우는 선형 독립적과 풀랭크 등의 용어가 사용되는 듯 했다. 이것은 차후 좀 더 엄밀히 증명해보고 싶다.//

1. 자유변수는 자유롭게 움직일 수 있는 변수이고, 기본변수는 자유변수에 값에 의해 결정되는 변수이다.(기본 변수 = 상수 \* 자유변수 + 상수 꼴)
2. 주어진 선형연립방정식의 해집합은 그것의 한 해(특수해)와 선형연립방정식과 계수행렬이 같은 동차 선형연립방정식의 해집합의 합으로 표현된다. 이러한 표현을 일반해라고 부른다.
3. 통상 기호의 의미는 기본행 연산을 수행하였다는 의미이다.
4. 선형연립방정식의 해가 존재한다고 가정 할 때, 해당 선형연립방정식의 자유변수의 개수를 통해 해의 크기를 알 수 있다
5. 자유변수가 0개 : 해가 1개
6. 자유변수가 1개 : 해가 직선형태(1차원)
7. 자유변수가 2개 : 해가 평면형태(2차원)

일반적으로 미지수가 n, 자유변수가 m개 인 선형연립방정식이 해를 가지면 그 해집합을 n차원 공간의 m차원 부분 공간 모양이 된다. 이런 이유로 자유변수의 수를 해집합의 차원이라고도 한다.

1. 행렬의 연산

행렬의 정의에 대해서는 기본적으로 앞에서 정의하였으므로 언급치 않겠다. 다만, 햇갈릴 수 있는 내용에 대해 잠시 정리하고 간다.

행렬은 이름처럼 행과 열로 이루어진다. 따라서 행렬의 특정 행, 혹은 열만 따로 빼서 표시할 수도 있을 것이다. 그것이 아래와 같다.

위 식은 차례로 행렬의 i행과 j열을 표현한 부분이다.

또한, 하나의 원소에 대해서 와 같이 표현하기도 한다.

행렬의 한 형태인 정사각행렬에 대해서도 보자.

1. 정사각행렬은 행과 열의 길이가 같은 행렬을 의미한다. 정사각행렬에서 대각선에 놓여있는 요소 a11, a22, … ann을 행렬의 대각요소 diagonal entries라고 한다.
2. 정사각행렬에서 대각요소 위의 요소들이 모두 0이라면, 해당 행렬을 하삼각행렬 lower triangular matrix라고 한다.
3. 위의 반대를 상삼각행렬 upper triangular matrix 라고 한다.
4. 또한 대각요소를 제외한 모든 요소들이 0인 경우는 대각행렬 diagonal matrix이라 하며,
5. 대각선에 대하여 서로 대칭인 위치에 있는 요소가 서로 같으면, 대칭행렬 symmetric matrix
6. 대각요소가 0이고, 대칭인 위치에 있는 요소가 절대값은 갖고, 부호가 반대인 경우 이를 교대행렬 alternatig matrix라고 한다.

두 행렬 A, B가 A = B임은 라는 의미이다.

이제, 본격적으로 행렬의 연산을 알아보자

1. 두 행렬의 합은 두 행렬이 모두 m x n 행렬이라는 전제하에서 이루어진다. 그리고 두 행렬의 합은 각 행렬에서 위치가 같은 원소의 합으로 이루어진 행렬을 반환하는 것이다.
2. 행렬의 상수곱은 행렬의 모든 원소에 대하여 상수배를 한 행렬을 반환하는 것이다.

모든 요소가 실수인 m x n 행렬들에 대해서 다음이 성립한다.

1. 교환 법칙 A + B = B + A
2. 결합법칙 (A + B) + C = A + (B + C)
3. 합에 관한 항등원 존재(모든 요소가 0인 행렬)
4. 합에 관한 역원 존재(행렬의 모든 요소는 실수 이므로 합에 대해 역원이 존재)
5. 상수에 관한 분배 결합 등

모든 요소가 0인 행렬을 영행렬 zero matrix, 라고 한다.