선형대수학 공부 기록 1일차

1. 선형방정식

선형방정식 linear equation은 각 변수들의 거듭제곱이나 근호, 변수들간의 곱, 삼각함수나 지수함수의 형태를 포함하지 않고, 상수와 변수의 곱 항 혹은 상수 항을 더하거나 뺀 형태로 이루어진 방정식이라 할 수 있다.

예를 들어 n개의 변수에 대한 선형 방정식은 다음과 같이 표현된다.

선형방정식에서 방정식의 해 solution 란 각 변수의 임의의 상숫값을 대입하였을 때, 주어진 방정식을 만족하게 하는 수의 조 를 의미한다

//첨언. 위에서 “수의 조”라는 표현을 “sequence of number” 이라고 생각했는 데, 이것이 적절한 표현인지는 모르겠다.//

그리고 주어진 선형방정식의 모든 해들의 집합을 해집합 solution set 이라고 한다.

1. 선형연립방정식

선형연립방정식 system of linear equations이란 선형방정식이 두 개 이상 나열된 것을 의미한다. 아래는 선형연립방정식의 일반적 형태이다.

위 식에서 가 모두 0이라면, 이를 특별히 동차선형연립방정식이라고 한다. 왜, 이름의 앞에 동차가 붙는가 하면, 상수만으로 이루어진 항은 결국 변수가 0차인 항이라 볼 수 있기 때문이다. 고로 상수항이 0이되면, 선형방정식의 모든 항은 차수가 1로 동일하게 되고, 이에 따라 선형연립방정식의 모든 항도 차수가 1로 동일하게 되므로, “동차”라는 표현을 쓰는 것이다.

1. 선형연립방정식의 해

//나는 선형연립방정식의 해를 n차원 평면 상에 존재하는 n개의 실선이 모두 교차하는 점 들의 집합이라고 생각하였다. 그러나 chat-gpt의 설명에 따르면 이는 옮은 표현이 아니라고 한다. 정확히는 실선이 아닌 초평면(n차원에서 n-1차원 평면)의 교차점이라는 설명이 옮다고 한다.//

선형방정식의 해는 각 방정식의 기본 작용을 하여 얻을 수 있다. 기본작용이란 다음과 같다.

1. 한 방정식에 0이 아닌 수를 곱한다.
2. 두 방정식을 서로 교환한다.
3. 한 방적의 상수배를 다른 방정식에 더한다.

위의 작용을 통해 주어진 선형연립방정식의 해집합이 변하지 않으면서 해를 구하기는 쉬운 새로운 선형연립방정식을 찾아가는 것이다. 그리고 이렇게 찾은 해는 항상 3가지의 경우 중 하나를 가진다.

1. 해가 하나인 경우
2. 해가 존재하지 않는 경우
3. 해가 무수히 많은 경우)

//아쉽게도, 2차원 평면상에서는 위와 같은 해의 존재 제한을 이해하였지만, 그 이상의 차원에서의 해의 존재에 대한 제한을 이해하지 못했다.//

1. 행렬

행렬 matrix이란 일반적으로는 숫자를 그저 직사각형으로 나열한 것을 의미한다. 만약, 선형연립방정식에서 계수와 상수 만을 남겨서 나열했다면, 그 때는 그냥 행렬이 아닌 첨가행렬 augmented matrix, 계수만 나열했다면 계수행렬 coefficient matrix 이라고 부른다.

선형연립방정식에서 기본행 연산이 기본작용이 기억나는가? 그것이 행렬에도 적용될 수 있다. 첨가행렬(계수와 상수만 남긴 행렬)의 한 행은 선형연립방정식의 한 식에 해당한다. 고로, 첨가행렬의 각 행에도 기본작용에 해당하는 연산이 가능하고, 이것을 기본행 연산이라고 한다.

1. 한 행에 0이 아닌 수를 곱한다.
2. 두 행을 서로 교환한다.
3. 한 행의 상수배를 다른 행에 더한다.

//여담으로 “연산”이라는 어감 때문인지는 이산수학 과목에서 배우는 대수계와도 유사한 느낌이 들지만, 필지가 이산수학에 대한 이해가 부족하므로 이는 확실치 않은 것이다.//

자, 이제 선형연립방정식을 첨가행렬로 표현할 수 있고, 기본행연산이란것도 알게 되었다. 그렇다면, 구체적으로 선형연립방정식의 해는 어떻게 구할 수 있을까? 그것을 단계별로 알아보자.

먼저, 전방소거법 forward elimination이다.

전방소거법은 다음과 같다. 먼저, 한 변수의 계수가 0이 아닌 한 식을 고른다. 그 식과 다른 식을 기본작용(행렬이면 기본행연산)하여 다른 모든 식에서 그 변수 가진 항을 제거한다. 그리고 이를 다른 변수에도 반복한다. 그러면 결과적으로 아래와 유사한 형태가 나타나게 될 것이다.

위 식을 첨가행렬로 표현하면

이다. 위 행렬을 자세히 살펴보면, 각 행에서 처음으로 만나는 0이 아닌 수는 1이다. 아래의 행에서 처음으로 나타나는 1은 위의 행에서 처음으로 나타나는 1보다 오른쪽에 놓인다. 이런 행렬을 첨가행렬의 계단행렬형 row-echelon form 이라고 한다.

다음으로 후방대입법 back substitution이다.

각 첨가행렬의 행에서 처음으로 나타나는 1들 위의 수들을 0으로 만들기 위해 전방소거법처럼 기본행연산을 실시하자. 그러면 각각의 행, 선형연립방정식에서의 식은 계수가 1인 하나의 변수와 하나의 상숫값으로만 이루어진 식으로 바뀔 것이다. 이렇게 나온 행렬을 기약계단행렬형 reduced row-echelon form이라 한다. 아래는 그 예시다.

//책에서는 가우스 소거법과 가우스 조단 소거법, 피벗에 대해 이야기 하나 필자는 이를 온전히 이해하지 못했다.//8p